$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha^2 + 4\alpha = 0 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2(1+m^2)\alpha - 2(1+m^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 2 \\ -\alpha^3 + 2\alpha^2(1+m^2)\alpha - 2(1+m^2) = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \alpha = 2$ car seul le réel 2 vérifie les deux équations.

Conclusion : $z_0 = 2i$ est la solution imaginaire pure.

b) $2i$ est une racine de $P(z) = z^3 + 2(1-i)z^2 + (1+m^2-4i)z - 2i(1+m^2)$

$\Rightarrow \exists (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $P(z) = (z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

- $P(z) = (z-2i)(az^2+bz+c); \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P(z) = az^3 + bz^2 + cz - 2iaz^2 - 2ibz - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$\Leftrightarrow P(z) = az^3 + (b-2ia)z^2 + (c-2ib)z - 2ic; \forall z \in \mathbb{C}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2ia = 2(1-i) \\ c - 2ib = 1 + m^2 - 4i \\ -2ic = -2i(1+m^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 1 + m^2 \end{cases}$$

Ainsi $P(z) = (z-2i)(z^2+2z+1+m^2)$.

$(E) \Leftrightarrow P(z) = 0 \Leftrightarrow z - 2i = 0$ ou $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$

$(\Delta = 1 - 1 - m^2 = (im)^2)$

$\Leftrightarrow z = 2i$ ou $z = -1 - im$ ou $z = -1 + im$.

2)a) $\cdot \text{aff}\left(\overrightarrow{AM'}\right) = -1 - im - 2i = -1 - i(m+2)$

$\cdot \text{aff}\left(\overrightarrow{M''B}\right) = -2 - 2i - (-1 + im) = -1 - i(m+2)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM'} = \overrightarrow{M''B} \Leftrightarrow AM'BM''$ est un parallélogramme .

b) $AM'BM''$ est un rectangle $\Leftrightarrow M'M'' = AB$

$\Leftrightarrow |-1 + im + 1 + im| = |-2 - 2i - 2i|$

$\Leftrightarrow |2im| = 2\sqrt{1+4} \Leftrightarrow m = -\sqrt{5}$ ou $m = \sqrt{5}$

PROBLEME